

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය I Pure Mathematics I	S/I	
----	-------------------------------------	-----	--

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) $u_r = r(r+1)$ යැයි සිතමු

$\sum_{r=1}^n u_r$ සහ $\sum_{r=1}^n \frac{1}{u_r}$ සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{u_r}$ අභියාචිත වුව ද $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභියාචිත නොවන බව පෙන්වන්න.

එහෙයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$a_r = \frac{r^2(r^2+1)+2(r^3-1)}{r(r+1)}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන a_r , r වැනි පදය ලෙස ඇති ශ්‍රේණියේ මුල් n පදවල රේඛායා සොයන්න.

නව ද, $\sum_{r=1}^n a_r$ අභියාචිත නොවන බව ද පෙන්වන්න.

- (b) S_n යනු

$$\frac{3}{1.2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි රේඛායා යැයි ගනිමු.

ගණිත අඟුණක මූලධර්මය යොදමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$$

බව පෙන්වන්න.

2. (a) $x^2 > |5x+6|$ වන පරිදි වූ x හි අගයන් සොයන්න.

- (b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයා එහෙයින්, ඕනෑම සෘණ නොවන x, y, z සඳහා

$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ බව පෙන්වන්න.

එන p, q, r සඳහා

$$(i) \frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$$

$$(ii) \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$$

$$(iii) \frac{p}{q+r} + \frac{q}{r+p} + \frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. (a) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α සහ β වේ; මෙහි b සහ c තාත්ත්විකය.
 α^2 සහ β^2 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න.
 $b^3 - 6b + 9 = 0$ සහ $c = 2$ නම්, α සහ β හි තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.
 එහෙයින්, $y^3 - 6y + 9 = 0$ හි තාත්ත්වික මූලය සොයන්න.

- (b) x සහ k තාත්ත්වික නම්, සියලු ම x සඳහා

$$0 \leq \frac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3} (k^2 - k + 1)$$

බව පෙන්වා, $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ප්‍රමාණය, එහි භූමිකම් හා විශාලතම අගයන් ගන්නා x හි අගයන් ලබා ගන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මූලාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \quad \text{යැයි සිතමු.} \quad \alpha^r \quad (r = 1, 2, 3, 4) \quad \text{යනු} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

සමීකරණයේ මූල බව පෙන්වන්න.

$\alpha + \alpha^4$ සහ $\alpha^2 + \alpha^3$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය සොයා, එහෙයින් $\cos 72^\circ$ හි අගය සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය සහ විස්තාරය අර්ථ දක්වන්න.

ආරාමයේ රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යය z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. z^2 නිරූපණය කළහොත් Q ලක්ෂ්‍යය ජ්‍යාමිතික ලෙස නිර්මාණය කරන්නේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය $(1, 0)$ සහ ඒකක අරයෙන් යුත් වෘත්තය මත P පිහිටයි නම්,

(i) $|z^2 - z| = |z|$

(ii) විස්. $(z - 1) =$ විස්. $z^2 = \frac{2}{3}$ විස්. $(z^2 - z)$

බව ජ්‍යාමිතිකව පෙන්වන්න.

6. (a) මුදල් පසුම්බික රුපියල් පහේ කාඩ් 1 ක් ද රුපියල් දෙකේ කාඩ් 2 ක් ද රුපියල් කාඩ් 3 ක් ද ගස පහකේ කාඩ් 4 ක් ද අඩංගු වේ. කාඩ් 3 ක් තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර කොපමණ ද?

- (b) *HOMOGENEOUS* යන වචනයෙහි අක්ෂර (වරකට සියල්ලම ගනිමින්) 3 326 400 ආකාරයකින් පිළියෙල කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මේවායින් කොපමණක් ව්‍යංජනාක්ෂරයකින් පටන්ගෙන එවැන්නකින් අවසාන වේ ද? (ව්‍යංජනාක්ෂරයක් යනු A, E, I, O, U හැර අන් ඕනෑ ම අක්ෂරයෙකි.)

- (c) (i) සංඛ්‍යාංකයන්හි පුනරාවර්තනවලට ඉඩ තිබේ නම්

(ii) සංඛ්‍යාංකයක පුනරාවර්තන දෙකකට වඩා ඉඩ නොමැති නම්

0, 1, 4, 5, 6, 7 සංඛ්‍යාංකවලින් (ඉහතයෙන් ආරම්භ වන සංඛ්‍යා නොගැලකූ විට) සංඛ්‍යාංක හතරකින් යුත් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.

7. n වන නිශ්ලක් වීම, $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණයේ මැද පදය

$$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} 2^n x^n$$

බව පෙන්වන්න.

එම ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදයට විශාලතම සංගුණකය සීමිත පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න; x වන යැයි උපකල්පනය කරන්න.

8. (a) $x \neq 0$ වීම, ප්‍රමුඛවර්ණය මගින් $\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ලබාගන්න.

(b) $y = e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} \sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

එනමින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ λy ආකාරයෙන් $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න;

මෙහි λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

- (c) $x = \sin \theta$ සහ $y = \sin n\theta$ යැයි ගනිමු; මෙහි n නියතයක් ද $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ද වේ.

n සහ θ ඇතුළත් $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ලබා ගෙන, එනමින්

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

බව පෙන්වන්න.

9. (a) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\int \frac{(1+x^2)}{1+x^4} dx$ අනුකලය අගයන්න.

(b) n වන නිශ්ලක් යැයි සිතමු,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = 0$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

සවිද,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}$$

බව පෙන්වා, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

10. (a) ඕනෑම දර්ශකයක් සඳහා වූ ද්විපද ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, දශමස්ථාන 5 කට නිවැරදිව, $\sqrt{24}$ හි අගය සොයන්න.

- (b) $f(x) = \ln \cos x$ නම්

$$f^{(3)}(x) + 2f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) = 0$$

$$\text{බව සාධනය කරන්න: මෙහි } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

ඊළඟින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $f(x)$ හි මැක්වෙලරින් ප්‍රසාරණය x^4 හි සඳහා කෙස් ලබාගන්න.

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ ලෙස ගෙන, } \ln 2 \text{ ආසන්න වශයෙන් } \frac{\pi^2}{16} \left(1 + \frac{\pi^2}{96} \right) \text{ ට සමාන බව පෙන්වන්න.}$$

11. සියලු ම තාත්ත්වික t සඳහා,

$$x = \frac{1}{t^4 + 3} \text{ සහ } y = \frac{t}{t^4 + 3}$$

පරාමිතික සමීකරණවලින් C විස්තෘස් දී ඇත.

(i) t ට එරෙහි ව x ද

(ii) t ට එරෙහි ව y ද

ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඊළඟින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ස්පර්ශකය බෙන්ඩාංක අක්ෂවලට සමාන්තර වන ලක්ෂ්‍ය පෙන්වමින් C විස්තෘස් දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y^2 = 3x(1-x)^2$ යන්නෙන් යෙදු ලබන වික්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ සඳහා, ඉහත වික්‍රයේ ප්‍රථම වෘත්ත සාදකයෙහි ඇති කොටස C යැයි සිතමු. x අක්ෂය, $x = \frac{1}{3}$

රේඛාව සහ C මගින් අන්තර්ගතවන S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) y අක්ෂය වටා රේඛයන් 2π කෝණයකින් S ක්‍රමණය කිරීමෙන් සත්‍යය වන ඝනකයෙහි පරිමාව සොයන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

01	ශුද්ධ ගණිතය II Pure Mathematics II	S / II	පැය තුනයි Three hours
----	---------------------------------------	--------	--------------------------

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (අ) තෙවන ප්‍රමේයයේ විලෝමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA, AB පාදවල මධ්‍යලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් D, E, F වන අතර L, M, N යනු A, B, C සිට පිළිවෙලින් EF, FD, DE ට අඳිනු ලැබූ ලම්භවල අඩි වේ. DL, EM, FN ඒකලක්ෂ්‍ය බව සාධනය කරන්න.

- (ආ) ABC ත්‍රිකෝණයේ ලම්භ කේන්ද්‍රය H ද BC, CA, AB මත H හි ප්‍රසිසිම්ම පිළිවෙලින් P, Q, R ද වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ සර්වස්කය මත P, Q, R පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

2. AB පාදය CD ට සමාන්තරව ද $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = \beta$ ද වන $ABCD$ ක්‍රමසියම, එහි DC පාදය සිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ ද ක්‍රමසියම කළය මේසය සමඟ α කෝණයක් සාදන සේ ද තබා ඇත. A සහ B සිට මේසයට අඳිනු ලැබූ අභිලම්භ පිළිවෙලින් E සහ F වෙයි. θ යනු මේසයට AD හි ආනතිය නම්,

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin \beta$$

බව සාධනය කර α සහ β ඇසුරෙන් EDC කෝණයේ සයිනය සොයන්න.

$DC = 3AB$ නම්, සිරසට DB හි ආනතිය

$$\sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \beta}} \right)$$

බව පෙන්වන්න.

3. $y = ax + b$ සරල රේඛාව, $y = mx$ සහ $y = m'x$ රේඛා පිළිවෙලින් A සහ B හි දී ඡේදනය කරනු ලැබේ. මෙහි a සහ b ($\neq 0$) නියත වේ. C ලක්ෂ්‍යය, $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වෙයි; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

- (i) C හි බන්ධනාංක සොයන්න.

- (ii) $OACB$ රෝම්බයක් නම්,

$$(a^2 - 1)(m + m') + 2a(1 - mm') = 0$$

බව පෙන්වන්න.

- (iii) $OACB$ සමචතුරස්‍රයක් නම්, එහි වර්ගඵලය $\frac{2b^2}{1 + a^2}$ බව පෙන්වන්න.

4. (අ) a සහ b නියත වීම,

$$\frac{1}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta$$

සමීකරණය, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන්, සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. ඉහත රේඛාව, $r = 2c \cos \theta$ වක්‍රයට ස්පර්ශකයක් වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.

- (ආ) $y^2 - 4x \leq 0$, $x^2 - 4y \leq 0$ සහ $x + y - 3 \geq 0$ වන පරිදි, xy තලයෙහි පිහිටි R ප්‍රදේශ අඳුරු කරන්න.

R හි දී $x + 2y$ හි අවම අගය සොයන්න.

5. $P_1 = (x_1, y_1)$ සහ $P_2 = (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අනෙක වශයෙන් ඇති වක්‍රයෙහි සමීකරණය
 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

බව පෙන්වන්න.

O මූලලක්ෂ්‍යයේ සිට $S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$ වක්‍රයට විචලන ජායාක් අඳිනු ලැබේ; මෙහි a සහ r ධන වේ.

- (i) $r \geq a$ සහ (ii) $r < a$ අවස්ථාවන්හි දී වෙනස පැහැදිලිව සඳහන් කරමින්, ඉහත කී ජායායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ස්ථය සොයන්න.

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ වීම ඉහත ස්ථය ගැන කුමක් කිව හැකි ද?}$$

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලය මත පිහිටි, t_1 සහ t_2 පරාමිති සහිත ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කැරෙන ජායායෙහි සමීකරණය සොයන්න. මෙම ජායා නාභිය හරහා යයි නම්, $t_1 t_2 + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත පරාවලයේ AB නාභීය ජායායක M මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා, AB ට සමාන දිගක් සහිතව එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද M වන පරිදි x අක්ෂයට සමාන්තරව PQ රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. P හි x ඛණ්ඩාංකය Q හි x ඛණ්ඩාංකයට වඩා කුඩා නම්, P හිත් Q හිත් පරිසිළුවෙළින් $x = -a$ සරල රේඛාවක් $y^2 = a(x - 3a)$ පරාවලයක් බව පෙන්වන්න.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටි, විකේන්ද්‍රික කෝණ θ සහ ϕ වූ P, Q ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන රේඛාවේ සමීකරණය

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta + \phi}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\theta + \phi}{2} = \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

එනමින්, P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියා P හි දීත් Q හි දීත් ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

A, B, C යනු AB සහ BC අභ්‍රම දිශාවන්ට පවතින සේ, ඉලිප්සයක් මත වූ විචලන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. A සහ C හි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්ථය ඉලිප්සයක් බව පෙන්වන්න.

8. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවිලයක සමීකරණය $xy = c^2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වා සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බහුවිලයේ දී ඇති ලක්ෂණ දෙකක් යා කෙරෙන ජ්‍යායෙහි සමීකරණය සොයන්න.

P_1, P_2, P_3 යනු ඉහත බහුවිලය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂණ තුනක් වන අතර H යනු P_1, P_2, P_3 ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රයයි. H හි ඛණ්ඩාංක ලබාගෙන, H ලක්ෂ්‍යය බහුවිලය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

U සහ V යනු පිළිවෙලින් $P_1 H$ සහ $P_2 P_3$ හි මධ්‍ය ලක්ෂණ වේ. UOV කෝණය $= \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න; O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

9. (අ) ප්‍රසරණ අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක Δ වර්ගඵලය, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තවද,

$$\frac{\Delta}{\tan \frac{A}{2}} + \Delta \tan \frac{A}{2} = bc \quad \text{බවත්}$$

$$\frac{\Delta}{s \tan \frac{A}{2}} + s = b + c \quad \text{බවත්}$$

සාධනය කරන්න: මෙහි $2s = a + b + c$.

- (ආ) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා,

$$\tan \widehat{AOH} = \frac{|\sin 2B - \sin 2C|}{1 + \cos 2B + \cos 2C}$$

බව සාධනය කරන්න: මෙහි O සහ H යනු පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ.

10. (අ) විසඳන්න.

(i) $6 \tan^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x$.

(ii) $\cos^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1$.

(ආ) $\sin \frac{x+y}{2} = u$ සහ $\cos \frac{x-y}{2} = v$ නම්,

$$\sin x + \sin y = \sqrt{2},$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}$$

යන සමඟාමී සමීකරණ

$$uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$$

ලෙස උභෙත්‍යය වන බව පෙන්වන්න.

එනමින්, දී ඇති සමඟාමී සමීකරණ x සහ y සඳහා විසඳන්න.

11. A සහ B යනු, සමභාවිත පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශයක් හා ආශ්‍රිත සිද්ධි අවකාශයට අයත් ඕනෑම සිද්ධි දෙකකි. ප්‍රසාරණ අංකනයෙන්,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

බව පෙන්වන්න.

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වන තෙක්, නිර්දේශ කාසියක් විසිසරනු ලැබේ. පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය ලියන්න.

එක් එක් අවස්ථාව සඳහා

(i) r වැනි විසිසිරීමේ දී

(ii) ඉරවිටේ සංඛ්‍යාවක් සහිත විසිසිරීමක දී

(iii) 3 න් බෙදෙන විසිසිරීමක දී

ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

12. X විච්ඡේදන සමභාවිතා විචල්‍යයට පහත දක්වන වගුවේ දී ඇති ආකාරයේ, සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් ඇත : මෙහි a නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$P[X = x]$	.05	a	.06	$(1 - a)^2$	.10

X සඳහා සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් සිද්ධි හැකි බව පෙන්වා, ඒවා සොයන්න.

මෙම X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති එක එකක් සඳහා, X හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචල්‍යාව සොයන්න.

$Y = X^2$ යැයි ගනිමින්, X ට සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති දෙකක් සිදු නමුත් Y ට ඇත්තේ එක් සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

Y හි මධ්‍යන්‍යය සහ විචල්‍යාව සොයන්න.